

Mathematik für Physiker Vordiplom Mathematik

Repetition

Tübingen, den 28. September 2006

$$\int_{\text{☹}}^{\text{😊}} d\text{😊} = \sqrt{\text{😊}}$$

Diese Zusammenfassung steht unter Kopierschutz

© by [Christian Stefano Schuster](#)

„Die Philosophie steht in jenem riesigen Buch geschrieben, das uns ununterbrochen offen vor Augen liegt, ich meine das Universum. Aber man kann es nicht verstehen, wenn man nicht zuerst die Sprache und die Buchstaben kennen lernt, in denen es geschrieben ist. Geschrieben aber ist es in mathematischer Sprache, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren, und ohne diese Mittel ist es für Menschen unmöglich, auch nur ein einziges Wort zu verstehen; ohne sie irrt man sinnlos in einem dunklen Labyrinth umher.“

Galileo Galilei, Dialog, 1632

Inhaltsverzeichnis

I	Reelle und komplexe Zahlen	7
1	\mathbb{N} und die vollständige Induktion	7
1.1	Das Induktionsaxiom	7
2	die reellen Zahlen als geordneter Körper	7
2.1	Die Gruppenaxiome	7
2.2	Die Körperaxiome	8
2.3	Die Ordnungsaxiome	8
2.4	\mathbb{Q} liegt dicht in \mathbb{R}	9
2.5	Die Vollständigkeit von \mathbb{R}	9
3	Der Körper der komplexen Zahlen	9
3.1	Polardarstellung	10
3.2	Der Fundamentalsatz der Algebra	10
II	Folgen, Reihen, Konvergenz	11
4	konvergente Folgen	11
4.1	Eigenschaften	11
4.2	Vergleichskriterium	11
4.3	Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß	11
4.4	Konvergenzkriterien	12
4.5	Fibonacci	12
4.6	wichtige Grenzwerte	12
5	Reihen	13
5.1	Konvergenzkriterien für Reihen	13
5.2	absolut konvergente Reihen	14
5.3	wichtige Reihen	14
III	Reelle und komplexe Funktionen, Stetigkeit	15
6	stetige Funktionen	15
6.1	Stetigkeit	15
6.2	Satz von Maximum und Minimum	16
6.3	Monotonie und Stetigkeit der Umkehrfunktion	16
6.4	stetige Fortsetzbarkeit	16
7	spezielle Funktionen	17
IV	Differentialrechnung in \mathbb{R}	18
8	Differentiation	18
8.1	Ableitung der Umkehrfunktion	18
9	Mittelwertsätze und Folgerungen	19
9.1	lokale Extrema	19
9.2	der Mittelwertsatz	19
9.3	der verallgemeinerte Mittelwertsatz	19
9.4	Regel von de L'Hospital	19
10	Höhere Ableitung und der Satz von Taylor	20
10.1	n -te Ableitung und $C^n(\mathbb{I})$ bzw. $C^n(\mathbb{R})$	20
10.2	Der Satz von Brook Taylor	20

V	Integralrechnung	21
11	Definition des Regelintegrals	21
11.1	Treppenfunktionen	21
11.2	Das Regelintegral	22
12	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	23
12.1	Die Stammfunktion	23
12.2	Das Theorem	23
13	Integralrechnung	24
14	Uneigentliche Integrale	24
15	Kriterien für die Integration	25
15.1	Integralkriterium	25
15.2	Integration/Differentiation und gleichmäßiger Limes	25
15.3	Majorantenkriterium	26
15.4	Grenzwertkriterium	26
16	uneigentliches Integrieren	26
VI	Metrik und normierte Räume	27
17	Die Norm \Rightarrow die Metrik	27
17.1	Teilmengen eines metrischen Raumes	27
17.2	Konvergenz	28
VII	Stetigkeit	29
18	Folgenstetigkeit	29
19	Banach'scher Fixpunktsatz	29
20	Gebiete	29
VIII	Kompaktheit	30
21	Überdeckungen	30
21.1	Das Schachtelungsprinzip	30
22	Der Satz von Bolzano-Weierstraß	30
23	Der Satz von Weierstraß	30
IX	Differenzierbarkeit	31
24	Die partielle Differenzierbarkeit	31
24.1	Das Vektorfeld	32
24.2	Die Richtungsableitung	32
24.3	Korrelationen	32
25	Die Differenzierbarkeit	33
25.1	Allgemeine Kettenregel	34
26	Der Mittelwertsatz für mehrere Veränderliche	34
26.1	Der Schrankensatz	34

X	Taylor-Formel und lokale Extrema	35
27	Die Taylor-Formel	35
27.1	Multi-Index	35
27.2	Die Formel	35
28	lokale Extrema	36
28.1	Kriterien	36
XI	Implizite Funktionen	37
29	Der Satz über implizite Funktion	37
29.1	einführendes Beispiel	37
29.2	Der Hauptsatz	37
30	Lokale Extrema unter Nebenbedingungen	38
XII	Gewöhnliche Differentialgleichungen	39
31	Gewöhnliche Differentialgleichungen	39
32	Dynamisches System	39
32.1	zugehöriges Vektorfeld	39
33	Differentialgleichungen	40
34	System gewöhnlicher DGL	40
34.1	Zurückführung auf ein System erster Ordnung	40
34.2	Bemerkungen	41
35	Existenz und Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf	41
35.1	Grundidee des Beweises	41
35.2	maximale Lösung	42
35.3	Schlußbemerkungen	42
XIII	Lineare Systeme	43
36	lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung	43
36.1	globale Existenz	43
36.2	Lösungs-Fundamentalsystem	43
36.3	Lösungsmethoden	44
37	Systeme n -ter Ordnung	45

XIV	Funktionentheorie	46
38	Holomorphie und komplexe Differenzierbarkeit	46
38.1	komplexe Differenzierbarkeit	46
38.2	Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen	47
39	komplexe Wegintegrale	47
39.1	Reparametrisierung	48
40	Existenz von Stammfunktionen	48
41	Der Cauchy-Integralsatz	49
41.1	Homotopie	49
41.2	Der Cauchy-Integralsatz	50
42	Die Cauchy-Integralformel	50
42.1	Umlaufzahl	50
42.2	Die Cauchy-Integralformel	51
42.3	Die Cauchy-Integralformel für Ableitungen	51
42.4	kompakte Konvergenz	52
43	Potenzreihen (im Komplexen)	52
43.1	Die Nullstellen holomorpher Funktionen	53
44	Laurent-Reihen und isolierte Singularitäten	54
44.1	isolierte Singularitäten	54
44.2	Der Satz von Weierstraß-Casorati	55
45	Der Residuenkalkül	55
45.1	Der Residuensatz	55
45.2	Integrale der Form $\int_{-\infty}^{+\infty}$	56
XV	Abstrakte Maß und Integrationstheorie	57
46	Einleitung	57
46.1	Das Inhaltsproblem	57
46.2	Das Maßproblem	57
46.3	Grundzüge der Maßtheorie	57
47	σ -Algebren und Borel-Mengen	58
47.1	das Maß	58
47.2	das äußere Maß	58
47.3	Das Lebesgue-Maß	58
48	messbare Funktionen	59
48.1	Beispiele	59
49	Definition des Lebesgue-Integrals	60
49.1	einfache Funktionen	60
49.2	Das Lebesgue-Integral	61
49.3	Kriterien für die Integration	61
XVI	\mathcal{L}^p-Räume	62
50	Funktionsraum mit Halbnorm	62
50.1	Sonderfall $p = \infty$	62
51	der spezielle Banachraum	63
51.1	Die Minkowski-Ungleichung	63
51.2	Satz von der dominierten (majorisierten) Konvergenz	63
52	Der Hilbert-Raum	64
52.1	separable Räume	65
52.2	Projektionssatz	65

XVII	Produktmaße und der Satz von Fubini	66
53	Konstruktion des Produktmaßes	66
53.1	Existenz und Eindeigkeitssatz	66
53.2	Cavalieris Prinzip	66
53.3	Satz von Tonelli und Fubini	67
XVIII	Die Transformationsformel	68
54	Koordinatenwechsel	68
55	Die Formel	68
55.1	Der Volumenbegriff	68
56	Dichte und Bildmaß	69
57	Beispiel	69
XIX	Integration auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	70
58	Die Untermannigfaltigkeit	70
58.1	Die regulär parametrisierte Untermannigfaltigkeit	70
58.2	Die k -dimensionale Untermannigfaltigkeit	71
58.3	Kriterien	71
59	Integration auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$	72
59.1	Der Träger	72
59.2	Die Zerlegung der Eins	72
59.3	Integration auf M	73
XX	Der Divergenzsatz von Gauß	74
60	Der Satz von Gauß-Ostrogradski	74
60.1	Bemerkung	74
60.2	archimedisches Prinzip	74
61	Der Satz von Green	74
62	Begriffserklärungen	75
62.1	Kompaktum mit glatten Rand	75
62.2	Der Tangentialraum	75
62.3	Das Normalenfeld	75
XXI	Differentialformen	76
63	Pfaff'sche Formen (1-Formen)	76
63.1	(Co-)Tangentialbündel und spezielle Räume	76