Die Maxwell'schen-Gleichungen der klassischen Elektrodynamik

James Clerk Maxwell (1831-1879) wurde in Edinburgh geboren und studierte an den Universitäten von Edinburgh und Cambridge. Von 1856 bis 1860 war er Professor für Physik an der Universität von Aberdeen, anschließend am King's College in London. 1871 wurde er der erste Professor für Experimentalphysik in Cambridge und Gründer des dortigen Cavendish Laboratory. Maxwells Forschungsarbeiten und Schriften auf dem Gebiet des Elektromagnetismus ließen ihn zu einem der bedeutendsten Wissenschaftler des 19. Jahrhunderts werden. Sein bedeutendstes Werk ist *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873). In dieser Arbeit formulierte er die vier Grundgleichungen der Elektrodynamik, die das Wesen elektromagnetischer Felder in Raum und Zeit beschreiben.

$$
\begin{aligned}
* \circ * \,\mathcal{J} = \mathcal{J} &= \varrho\,\mathrm{d}x^0 - J_i\,\mathrm{d}x^i \stackrel{!}{=} *\,\mathrm{d} * \mathcal{F} = *\,\mathrm{d} * \left(\mathcal{D} \wedge \mathrm{d}x^0 + \mathcal{H}\right) = *\,\mathrm{d} * \left(D_i\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^0 + * \left(H_i\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^0\right)\right) \\
&= \varrho\,\mathrm{d}t - \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = *\,\mathrm{d}\left(\varepsilon^{io}{}_{jk}\, D_i\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k - H_i\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^0\right) \\
&= * \left(\varepsilon^{io}{}_{jk} \frac{\partial D_i}{\partial x_m}\,\mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k - \frac{\partial H_i}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x^n \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^0\right) \quad \text{mit } k \neq m \neq j \text{ und } i \neq n \neq 0 \\
&\stackrel{\star}{=} \varepsilon^{io}{}_{jk}\,\varepsilon^{mjk}{}_q \frac{\partial D_i}{\partial x_m}\,\mathrm{d}x^q - \varepsilon^{nio}{}_p \frac{\partial H_i}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x^p \\
&= \varepsilon^{io}{}_{jk} \left(\varepsilon^{ijk}{}_o \frac{\partial D_i}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x^0 + \varepsilon^{ojk}{}_i \frac{\partial D_i}{\partial x_0}\,\mathrm{d}x^i\right) \quad - \quad \varepsilon^{nio}{}_p \frac{\partial H_i}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x^p \\
&= \underbrace{\varepsilon^{io}{}_{jk}\,\eta^{jj}\eta^{kk}\,\varepsilon^{io}{}_{jk} \frac{\partial D_i}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_0}_{=\ \operatorname{div}\vec{D}\cdot\mathrm{d}x^0} \quad + \quad \varepsilon^{io}{}_{jk}\,\eta^{jj}\eta^{kk}\,\varepsilon_{ojki} \frac{\partial D_i}{\partial x_0}\,\mathrm{d}x^i \quad + \quad \underbrace{\varepsilon^{pnio}\,\eta_{pp}\,\partial_{x_n} H_i\,\mathrm{d}x^p}_{=\ -(\operatorname{rot}\vec{H})_p\ \mathrm{d}x^p} \\
&= \operatorname{div}\vec{D} \cdot \mathrm{d}t \quad + \quad \varepsilon^{io}{}_{jk}\,\eta^{jj}\eta^{kk}\,\eta_{ii}\,\varepsilon^{\boldsymbol{oi}}{}_{jk} \frac{\partial D_i}{\partial x_0}\,\mathrm{d}x^i \quad - \quad (\operatorname{rot}\vec{H})_p\,\mathrm{d}x^p \\
&= \operatorname{div}\vec{D} \cdot \mathrm{d}t \quad - \quad \varepsilon^{io}{}_{jk}\,\eta^{jj}\eta^{kk}\,\eta_{ii}\,\varepsilon^{\boldsymbol{io}}{}_{jk} \frac{\partial D_i}{\partial x_0}\,\mathrm{d}x^i \quad - \quad \operatorname{rot}\vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \\
&= \operatorname{div}\vec{D} \cdot \mathrm{d}t \ + \ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \ - \ \operatorname{rot}\vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \\
&\qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{div}\vec{D} = \varrho \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} \ + \ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
*\,0 = 0 &\stackrel{!}{=} *\,\mathrm{d}\,\mathcal{F} = *\,\mathrm{d}\left(D_i\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^0 + * \left(H_i\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^0\right)\right) \\
&= * \left(\frac{\partial D_i}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x^n \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^0 + \mathrm{d}\left(\varepsilon^{io}{}_{jk}\, H_i\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\right)\right) \\
&= * \left(\frac{\partial D_i}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x^n \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^0 + \varepsilon^{io}{}_{jk} \frac{\partial H_i}{\partial x_m}\,\mathrm{d}x^m \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\right) \\
&= \varepsilon^{nio}{}_p \frac{\partial D_i}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x^p + \varepsilon^{io}{}_{jk}\,\varepsilon^{mjk}{}_q \frac{\partial H_i}{\partial x_m}\,\mathrm{d}x^q \quad \stackrel{\star}{=} \quad \varepsilon^{io}{}_{jk}\,\varepsilon^{mjk}{}_q \frac{\partial H_i}{\partial x_m}\,\mathrm{d}x^q + \varepsilon^{nio}{}_p \frac{\partial D_i}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x^p \\
&= \text{vergleiche mit } \star \ \ldots \ = \ \operatorname{div}\vec{H} \cdot \mathrm{d}t \ + \ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \ + \ \operatorname{rot}\vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \\
&\qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0 \qquad \operatorname{rot}\vec{D} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}
\end{aligned}
$$